UNIVERSITE D'OTTAWA

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

OTTAWA, CANADA

Rapport Technique TR-73-1

(Janvier 1973)

UN ESSAI SUR QUELQUES ASPECTS DE LA THEORIE DE RELATIVITE RESTREINTE

par

Wolfgang **J. R.** Hoefer

AVANT-PROPOS

Le présent fascicule essaie d'exposer les fondements de la théorie de relativité restreinte de façon simple mais précise. Il s'adresse surtout aux étudiants prédiplomés en génie électrique qui, tout en possédant une formation de base en physique classique et en mathématiques, sont pour la première fois mis en contact avec les concepts relativistes.

Sans trop insister sur le formalisme mathématique qui risquerait d'obscurcir parfois l'aspect physique de la théorie, les nouveaux concepts sont introduits dans un ordre logique, accompagnés d'exemples et de faits expérimentaux.

Puisque le texte s'adresse surtout aux futurs ingénieurs en électricité, une bonne partie en est réservée aux aspects relativistes des champs électrique et magnétique. On y trouve de nombreuses références aux concepts classiques, mettant en évidence l'interprétation moderne des différents termes.

Sans vouloir remplacer les textes plus détaillés, cet essai permettra aux étudiants de s'initier à la matière mieux que ne le pourraient les notes prises pendant les cours.

Ottawa, le 30 janvier, 1973

Wolfgang J. R. Hoefer

TABLES DES MATIERES

1.) INTRODUCTION

Peu de théories ont bouleversé si profondément l'aspect de l'univers que la théorie de relativité. Pour la première fois, un homme, Albert Einstein, a fait glisser les fondements les plus inébranlables de la physique: le temps et l'espace absolus.

Encore pouvait-on saisir l'espace, le traverser dans toutes les directions, le remplir, le transformer, mais le temps s'écoulait uniformement, irreversible et inaffecté par quoi que ce soit.

Newton, le fondateur de la mécanique classique, ne jugea même pas nécessaire d'indiquer que son édifice se fondait sur un postulat "a priori" qu'aucune évidence théorique ou expérimentale n'avait prouvé être faux ou juste: que le temps était absolu et universel. Notre propre expérience de tous les jours nous montre combien cette notion est encore aujourd'hui intégrée dans notre intuition.

Si un espace absolu avait existé, Newton aurait été également incapable de le mettre en évidence. Néanmoins, il en avait une certaine idée: c'était un continuum euclidien à trois dimensions, balisable par des coordonnées, indépendent de son contenu matériel et inaffecté par le temps. On pourrait l'imaginer comme étant un immense trou dans un solide.

Mais la mécanique classique pouvait se passer de l'espace absolu: Galilée, en formulant son principe de relativité, avait clairement démontré que les lois physiques étaient les mêmes dans tout système de référence inertiel. Un tel système est caractérisé par l'absence totale de forces extérieures changeant son état de mouvement. En d'autres mots, aucune expérience de physique permet de déterminer la vitesse d'un système inertiel par rapport à un espace <u>absolu.</u> Seule la vitesse <u>relative</u> entre deux systèmes inertiels s'obtient par observation externe.

2.) LES TRANSFORMATIONS DE GALILEE

Il est intéressant d'apprendre comment se présente, selon la physique classique, le même événement à des observateurs dans différents systèmes inertiels (des observateurs qui sont en mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre.)

Considérons un système inertiel S matérialisé par les coordonnées x, y, z et le temps t. (Ce temps pourrait être indiqué par des horloges synchronisées et fixées un peu partout dans le système S.) Un autre système inertiel S' (coordonnées x', y', z' et temps t') se déplace avec une vitesse constante v le long de l'axe x. Admettons qu'à l'instant $t = t' = 0$ les origines et axes des deux systèmes coïncident. (Figure la).

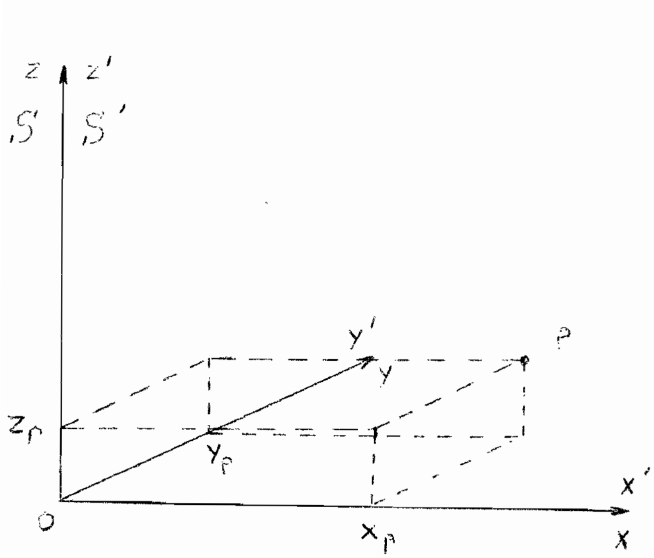


Figure 1a
Deux systèmes inertiels S et S' à l'instant de coïncidence
$t = t' = 0$

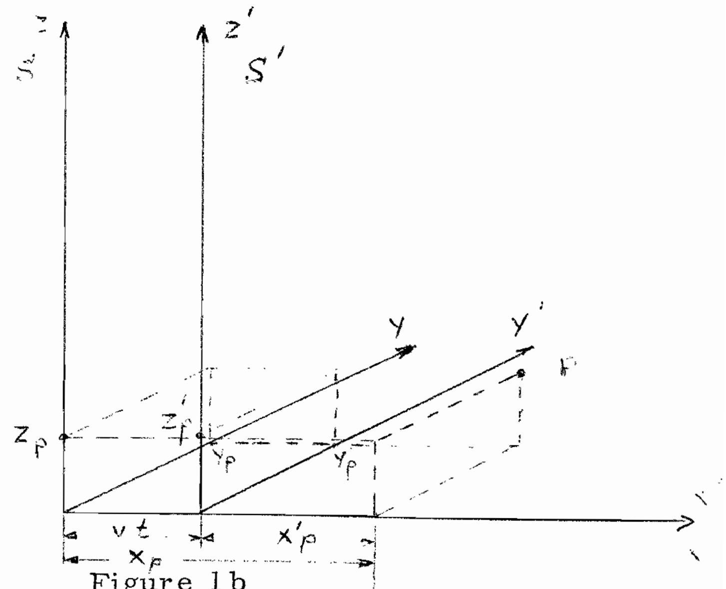


Figure 1b
Deux systèmes inertiels S et S' à l'instant t. S' s'est déplacé de $v.t$ par rapport à S

A cet instant, un point P a les mêmes coordonnées dans les deux systèmes:

$$x_p = x'_p , \quad y_p = y'_p , \quad z_p = z'_p , \quad t = t' = 0$$

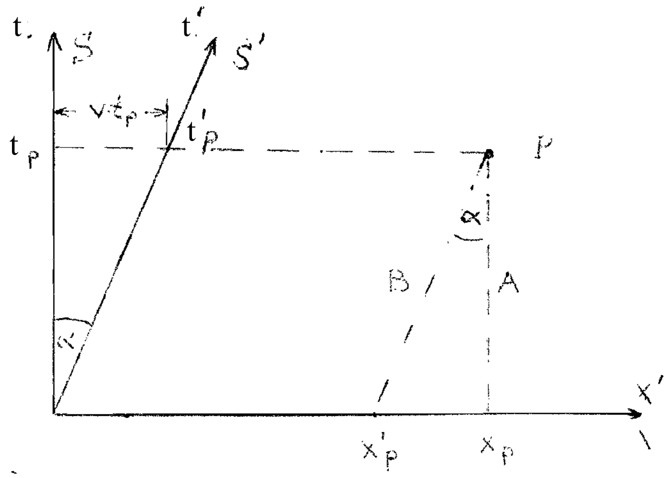
Après une période t les deux systèmes S et S' ont une position relative indiquée figure 1b. Maintenant le point P a les coordonnées suivantes

Dans $S(x, y, z, t)$	Dans $S'(x', y', z', t')$
$x_p = x'_p + v.t'$	$x'_p = x_p - v.t$
$y_p = y'_p$	$y'_p = y_p$
$z_p = z'_p$	$z'_p = z_p$
$t = t'$	$t' = t$

Tableau 1: Transformations de Galilée

Les expressions ci-dessus transforment les coordonnées d'un système inertiel à un autre système inertiel animé d'une vitesse uniforme v par rapport au premier. Elles sont appellées transformations de Galilée. On remarque que le temps est à priori le même dans les deux systèmes S et S'.

Vue l'égalité des coordonnées $y = y'$ et $z = z'$ dans notre cas, une représentation seulement de t et t' en fonction de x et x' contient toute information nécessaire. La figure 2 représente un diagramme "espace-temps" (avec un espace à une dimension), dans lequel les axes t et t' forment un angle qui dépend de la vitesse relative entre les deux systèmes.



Les sections A et B sont appellées "lignes universelles". Elles sont parallèles aux axes t respectivement t'. Ainsi A est la ligne universelle de P dans le monde S pendant que B est la ligne universelle du même point dans le monde S'. Leur intersection avec les axes x et x' donne sa position spatiale instantanée dans les deux systèmes S et S'. On voit facilement que cette représentation traduit les transformations de Galilée.

Figure 2
"Espace-temps" indiquant les coordonnées d'un point P dans deux différents systèmes de référence, possédant une vitesse relative v l'un par rapport à l'autre.

3.) LES LOIS DE NEWTON

Considérons les trois lois du mouvement formulées par Newton:

1.) Tout corps reste au repos ou en mouvement rectiligne et uniforme aussi longtemps qu'aucune force externe n'y est appliquée.

2.) Le produit de la masse et de l'accélération d'une particule est égal à la force appliquée, et l'accélération est dirigée dans la direction de la force.

3.) Action et réaction sont égales et opposées.

La première loi fait allusion à l'espace absolu, car le repos et le mouvement se rapportent ultérieurement à lui. Cependant, un système inertiel de référence étant défini par l'absence de toute force externe, on peut toujours trouver un système inertiel dans lequel un corps sans force externe est au repos. Dans tout autre système inertiel, il effectuera par conséquent un mouvement rectiligne et uniforme. Ceci montre que la première loi de Newton est valable dans tout système inertiel de référence.

La deuxième loi contient un autre postulat à priori, celui de la masse constante, indépendente de sa vitesse par rapport au système de référence dans lequel on la mesure (Il faut dire qu'à l'époque de Newton les techniques expérimentales étaient insuffisantes pour déceler les fines variations de masse qui se produisent aux vitesses macroscopiques, faibles par rapport à celle de la lumière. L'hypothèse d'une masse constante était alors justifiée.)

Voyons maintenant comment cette deuxième loi se comporte sous la transformation de Galilée. Dans un système inertiel S la seconde loi de Newton est représentée par la formule

$$\vec{F} = m . \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \tag{3. 1}$$

Un observateur dans un système S' se déplaçant à vitesse constante v par rapport à S (voir figure 3) mesurerait une force

$$\vec{F}' = m' . \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} \tag{3. 2}$$

De la figure 3 on déduit que

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} . t \tag{3. 3}$$

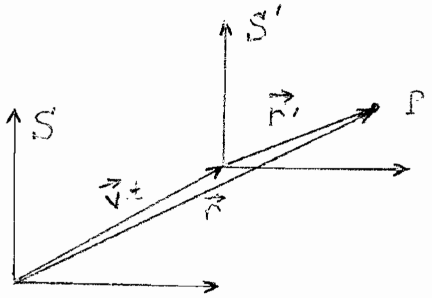


Fig. 3 Deux systèmes se déplaçant avec une vitesse v l'un par rapport à l'autre.

En différentiant deux fois selon t, on obtient

$$\frac{d(\vec{r}')}{dt} = \frac{d(\vec{r})}{dt} - \vec{v}$$

et

$$\frac{d^2(\vec{r}')}{dt^2} = \frac{d^2(\vec{r})}{dt^2} \tag{3. 4}$$

Puisque $t = t'$ et $m = m'$

$$\vec{F} = m. \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m'. \frac{d \vec{r}'}{dt'^2} = \vec{F}' \tag{3. 5}$$

Ceci montre que la deuxième loi de Newton est valable et inchangée dans tout système inertiel (on dit qu'elle est covariante par rapport aux transformations de Galilée) et indépendante d'une vitesse quelconque par rapport à un éventuel espace absolu.

La covariance de la troisième loi est impliquée dans la démonstration ci-dessus.

Pendant longtemps les physiciens ont renoncé à l'espace absolu parce qu'ils pouvaient s'en passer pour la description du monde. Mais le temps absolu dont l'existence était aussi fictive que celle de l'espace absolu , leurs était indispensable et fût adopté instinctivement.

EXERCICES

1) Quels sont les deux postulats à priori adoptés par Newton comme base de sa mécanique ?

2) Comment Newton imaginait-il l'espace absolu ?

3) Par quoi un système inertiel de référence est-il caractérisé ?

4) Qu'est-ce qu'une géométrie euclidienne ?

5) Formulez dans vos mots le principe de relativité de Galilée.

6) Ecrivez en notation vectorielle les transformations de Galilée entre deux systèmes inertiels S et S' (vitesse relative v). Supposez que les coordonnées de S et S' coincident à l'instant $t = t' = 0$.

7) Une particule P possède une vitesse u dans le système S. Quelle vitesse attribue un observateur dans S' à cette même particule ?

8) Dessinez un système de coordonnées obliques (2 dimensions, non orthogonales), choisissez trois points dans le premier quadrant et déterminez leurs coordonnées.

4.) LA MECANIQUE RELATIVISTE

Admettre un temps absolu et universel comme le fait la physique classique revient à dire, -- nous le verrons plus tard -- que l'interaction entre les corps et aussi la lumière se propagent à une vitesse infinie. Ceci n'est évidemment pas le cas. Toutes les expériences connues aujourd'hui confirment que la vitesse de la lumière est finie et égale à

$$c = 2.99776 . 10^{10} \text{ cm/s}$$

Mais la propriété la plus surprenante de la lumière est de se propager dans tout système inertiel avec la même vitesse c . Ceci ne s'explique pas. Le fait lui-même, prouvé expérimentalement* d'une part et déduit des équations de Maxwell d'autre part, fût élevé au rang d'un postulat par Einstein. Cependant, le principe de relativité (disant que toute loi de physique doit être indépendente du système de référence) est conservé dans la physique moderne. La seule différence entre la relativité galiléenne et la relativité d'Einstein réside dans la vitesse de propagation de la lumière. En d'autres mots, la relativité d'Einstein se confond avec celle de Galilée quand on fait tendre c formellement vers l'infini ($c \rightarrow \infty$). On comprend maintenant pourquoi la mécanique classique assure une précision suffisante pour la grande majorité des besoins pratiques. La vitesse c est tellement supérieure à la plupart des vitesses habituelles qu'en la supposant infiniment grande on ne compromet pratiquement pas l'exactitude des résultats obtenus.

4.1 L'INTERVALLE

Une description réaliste des phénomènes physiques doit admettre une vitesse finie de propagation de la lumière contrairement à la physique classique qui la suppose infinie. Comment peut-on dans ce cas relier les observations faites du même événement depuis deux différents systèmes de référence?

Un événement est déterminé par le lieu et l'instant où il se produit. Considérons deux événements A et B. A consiste en l'émission d'un flash de lumière, B représente l'arrivée de ce flash. Dans un système S, A se produit à l'endroit déterminé par les coordonnées x_1, y_1 et z_1 à l'instant t_1. B se produit à x_2, y_2, z_2 et t_2 . La distance entre les événements est donnée par

$$\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{1/2} = d \qquad (4.1)$$

---

* Voir [1], [3], [5] décrivant en détail ces expériences.

D'autre part, cette distance est égale à

$$d = c(t_2 - t_1) \qquad (4.2)$$

En combinant 4. 1 et 4. 2 on peut écrire

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0 \qquad (4.3)$$

La propagation du signal et les mêmes deux événements peuvent être observés à partir d'un système S'. Soient x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 les coordonnées de l'événement A dans le système S' et x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 celles du second. Puisque par définition le flash se propage à la même vitesse dans les deux systèmes S et S', on obtient par analogie avec (4. 3) :

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0 \qquad (4.4)$$

Si x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 sont les coordonnées de deux événements quelconques (où $t_2 - t_1$ n'est pas en général la période nécessaire à la lumière pour parcourire la distance spatiale entre ces événements), la grandeur

$$D_{12}^2 = -\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (jct_2 - jct_1)^2\right] \qquad (4.5)$$

est appellée "intervalle" séparant ces deux événements. Elle est différente de zéro en général, sauf si la distance $\left[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2\right]^{1/2}$ est parcourue par la lumière dans la période (t_2-t_1). (light-like events)
On remarquera que l'expression (4. 5) est une interprétation formelle de la distance entre deux points dans un hyper-espace à quatre dimensions dont la quatrième en est une imaginaire: jct. Cette interpretation géométrique est due au mathématicien polonais Herman Minkowski.

Pour deux événements aussi rapprochés que l'on veut, l'intervalle dD entre eux est égal à

$$dD^2 = -\left[dx^2 + dy^2 + dz^2 + (jcdt)^2\right] \qquad (4.6)$$

4. 2 INVARIANCE DE L'INTERVALLE

On déduit de ce qui précède que tout dD' est nul si dD est nul (expressions 4. 3 et 4. 4). Ceci nous conduit à admettre que dD et dD' sont proportionnels

$$dD = \alpha \cdot dD' \qquad (4.7)$$

α ne dépend que de la vitesse relative des deux systèmes inertiels de référence.

L'homogénéité de l'espace et l'uniformité du temps s'opposent à une dépendence de α des coordonnées et du temps. α ne peut dépendre non plus de la direction de la vitesse relative, ce qui serait contraire à l'isotropie de l'espace. C'est pourquoi nous pouvons poser également

$$dD' = \alpha \cdot dD \tag{4.8}$$

pour la même raison qui nous a autorisé à écrire $dD = \alpha \cdot dD'$, étant donné que la vitesse du premier système par rapport au second est égale à celle du second par rapport au premier. En combinant les expressions (4.8) et (4.7) on obtient

$$\alpha^2 = 1 \qquad \alpha = \pm 1 \tag{4.9}$$

Le choix du signe se fait en considérant un cas particulier, celui où la vitesse relative est nulle. Ici $dD' \equiv dD$ ce qui montre que α doit-être égal à +1. Etant donnée l'uniformité de la vitesse relative des référentiels, on a aussi pour les intervalles finis: $D' = D \quad (\alpha = +1)$.

Ceci est un résultat important: L'INTERVALLE ENTRE DEUX EVENEMENTS EST IDENTIQUE DANS TOUS LES SYSTEMES INERTIELS DE REFERENCE. C'est un INVARIANT par rapport à toute transformation d'un système de référence inertiel à un autre.

EXERCICES

1) A quelle vitesse se propageaient, selon Newton, la lumière et les interactions entre les corps ?

2) Quels sont les deux postulats " à priori" de Einstein, sur lesquels se fonde sa théorie de relativité restreinte ?

3) Quelle est la différence fondamentale entre la relativité de Galilée et la relativité d'Einstein ? Pour quelle condition les deux relativités se confondent-elles ?

4) Pourquoi la mécanique newtonienne, fondée sur la relativité de Galilée, donne-t-elle des résultats de précision suffisante dans la majorité des cas ?

5) Par quoi un événement est-il déterminé ?

6) Quelle est, dans un espace euclidien à n dimensions, la distance entre les deux points $A(x_1, x_2, \ldots x_i \ldots x_n)$ et $B(y_1, y_2 \ldots y_i \ldots y_n)$?

7) Pourquoi, dans la formule (4. 7), le coefficient α ne dépend-il ni des coordonnées de l'événement considéré ni de la direction de la vitesse relative entre les deux référentiels ?

8) Quelle considération nous permet de déterminer que le signe de α est positif ?

9) Quelle est la signification de l'équation $\alpha = +1$.
Interprétez ce résultat dans l'espace de Minkowski.

5) LES TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

Etablissons maintenant les formules de transformation pour le passage d'un système inertiel à l'autre, c'est-à-dire les formules qui permettent de trouver les coordonnées x', y', z', t' d'un événement dans le système S' d'après les coordonnées x, y, z, t d'un événement dans un autre système S.

Nous venons de dériver une propriété importante de ces transformations: L'intervalle D dans l'espace quadridimensionnel de Minkowski doit être invariant. Sous ces transformations, la distance entre deux points dans l'espace de Minkowski reste alors inchangée. Seules les rotations et les translations parallèles des systèmes de coordonnées satisfont à cette condition. Ces dernières se ramènent à un simple déplacement de l'origine des coordonnées (y compris l'origine du temps). Par conséquent, l'expression mathématique de la transformation recherchée est une rotation du système quadridimensionnel de coordonnées.

On ne limite pas la généralité du problème en choisissant arbitrairement les axes x et x' de S et S' dans la direction du déplacement relatif entre les deux référentiels, mais on évite ainsi des rotations dans le plan XY, YZ, ZX, YT et ZT. La seule rotation dans ce cas-là s'effectue dans le plan XT.

Les formules de cette rotation s'écrivent: (Voir p. e. [8])

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi - jct' \sin\varphi \\ jct &= x' \sin\varphi + jct' \cos\varphi \end{aligned} \tag{5.1}$$

où φ désigne l'angle de rotation. Les formules de transformation entre S et S' doivent alors être de la forme (5. 1), et φ sera une fonction de la vitesse relative v entre les référentiels.

Considérons d'abord le mouvement de l'origine du référentiel S' par rapport à S. Lorsque $x' = 0$, les formules (5. 1) prennent la forme

$$x = -jct' \sin\varphi \quad ; \quad jct = jct' \cos\varphi \tag{5.2}$$

et en divisant l'un par l'autre

$$j\frac{x}{ct} = \tan\varphi \tag{5.3}$$

Etant donné que x/t représente la vitesse v, on peut écrire:

$$\tan\varphi = j\frac{v}{c} \tag{5.4}$$

d'où, à l'aide de théorèmes trigonométriques

$$\sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} \quad ; \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} \tag{5.5}$$

on obtient:

$$\sin \varphi = \frac{j\ v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad ; \qquad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{5. 5}$$

En portant ces expressions dans l'équation (5. 1) :

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad ; \qquad t = \frac{x' \cdot v/c^2 + t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{5. 6}$$

On peut étendre ces transformations aux événements en dehors de l'axe x en ajoutant les équations $y = y'$ et $z = z'$. Nous obtenons ainsi en définitive:

$x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$x' = \dfrac{x - v.t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
$y = y'$	$y' = y$
$z = z'$	$z' = z$
$t = \dfrac{t' + x'v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$t' = \dfrac{t - x.v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Tableau 2. Les transformations de Lorentz permettent de calculer les coordonnées d'un événement dans un référentiel à partir des coordonnées du même événement dans un autre référentiel. Ici le système $S'(x', y', z', t')$ se déplace avec une vitesse v en direction de l'axe x du système $S(x, y, z, t)$. Dans S', le référentiel S se déplace dans le sens négatif de l'axe x' (v négatif).

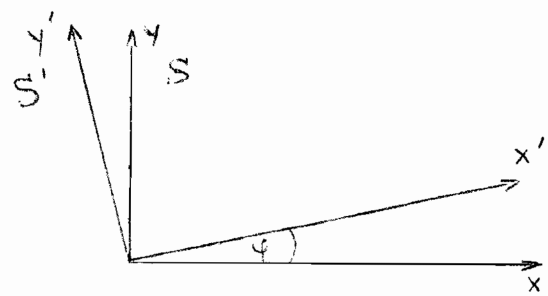
EXERCICES:

1) Quelles sont les quantités que relient des formules de transformation?

2) Quelle propriété importante doit posséder la transformation de Lorentz?

3) Quel genre de transformation possède cette propriété?

4) Etant donnés deux systèmes bidimensionnels $S(x, y)$ et $S'(x, y)$ dont les origines coïncident et qui sont inclinés l'un par rapport à l'autre d'un angle φ, dessinez les coordonnés du point P dans les deux systèmes et dérivez les relations géométriques entre ces coordonnées (transformations). Comparez le résultat aux équations (5. 1)



5) En utilisant les transformations de Lorentz, déterminez la longueur d'un bâton au repos dans le système S' comme la mesure un observateur dans le système S. ($v = 3/5\ c$)

(Explication: Supposez que les extrémités du bâton aient les coordonnées x'_1 et x'_2 dans S'. Sa longueur dans S' sera alors $\ell' = x'_2 - x'_1$. Un observateur dans S verra passer la bâton avec une vitesse v. Il déterminera alors la longueur du bâton en déterminant simultanément les coordonnées des extrémités dans S ($t_1 = t_2$). Il mesurera ainsi $\ell = x_2 - x_1$ dans son système. Discutez le résultat et trouvez la longueur ℓ pour $c \to \infty$.

6) Une montre M' est fixée sur l'axe x' du système S'. Dans le système S se trouvent deux autres montres synchronisées M_1 et M_2 aux endroits x_1 et x_2 respectivement. ($v = {}^3/_5\ c$)

Lors du passage de M' par x_1, un observateur dans S lit

t'_1 sur M'

t_1 sur M_1

Lors du passage de M' par x_2, un observateur dans S lit

t'_2 sur M'

t_2 sur M_2

Reliez par les transformations de Lorentz les deux intervalles de temps $t_2 - t_1$ et $t'_2 - t'_1$ et discutez le résultat. Quel est le rapport entre les deux intervalles de temps pour $c \to \infty$?

7) Une particule se déplace avec une vitesse constante v_1 par rapport à S' le long de l'axe x'. Quelle est la vitesse de cette particule par rapport à S (mesurée par un observateur au repos dans S) ?
(Utilisez les transformations de Lorentz).

6.) MECANIQUE RELATIVISTE

L'application des transformations de Lorentz à la mesure des distances et des intervalles de temps nous montre (voir exercices précédents) que des observateurs dans différents états de mouvement ne sont pas d'accord sur la distance et le temps qui séparent deux événements dans l'univers. On dirait à première vue que tout "absolu" fût détrôné par la théorie de relativité. Ceci n'est pas le cas. Nous avons vu que "l'intervalle" D entre deux événement est absolu et identique pour tout observateur. (D représente la "distance" dans un espace fictif aux quatre dimensions x, y, z et jct. Il ne faut pas essayer d'attacher une grande valeur métaphysique à cet "hyperespace", la représentation imaginaire de la quatrième dimension étant uniquement une astuce mathématique pour faciliter les calculs, comme dans la représentation complexe des courants alternatifs). Se trouver dans un autre système inertiel de référence veut simplement dire "voir l'intervalle D sous un autre angle". Ainsi, les projections de D sur les axes spaciales et temporale qui se mesurent directement, varient selon le système de référence. Rappellons donc les phénomènes de base qui se dérivent directement des transformations de Lorentz:

a) La contraction des longueurs

Un observateur mesure la longueur d'un bâton au repos par rapport à lui $\rightarrow \ell$

Un observateur se déplaçant avec une vitesse uniforme v par rapport au bâton dans le sens de sa longueur, mesure ℓ'. En comparant les résultats on trouve

$$\ell' = \ell\sqrt{1 - v^2/c^2} = \beta \cdot \ell \qquad (6.1)$$

$$(\beta = \sqrt{1 - v^2/c^2})$$

b) La dilatation du temps

Un observateur dans un système S mesure le temps qui passe entre deux intervalles $\rightarrow \Delta t$

Un observateur dans un système S' se déplaçant par rapport à S avec une vitesse v mesure le même intervalle comme étant $\Delta t'$. En comparant les résultats on trouve

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} = \beta \cdot \Delta t \qquad (6.2)$$

(Dilatation veut dire que le temps dans S' semble s'écouler plus lentement pour un observateur dans S)

c) L'addition relativiste des vitesses

Contrairement à la mécanique classique, des vecteurs de vitesse ne s'additionnent pas simplement.

Soit $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ la vitesse d'une particule dans S

et $\vec{u}' = u'_x\vec{i}' + u'_y\vec{j}' + u'_z\vec{k}'$ la vitesse de la même particule dans

S'. Les composantes spatiales des vitesses sont reliées par les expressions:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} \quad ; \quad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x v/c^2}$$

$$u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x v/c^2} \tag{6.3}$$

d) La variation relativiste de la masse

L'impulsion d'une particule est une grandeur dont la conservation découle de la propriété d'homogénéité de l'espace. En mécanique relativiste, l'impulsion prend la forme

$$\vec{p} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \vec{v} \tag{6.4}$$

ce qui montre que la masse est une variable

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{6.5}$$

où m_o est dite la "masse de repos".

e) Energie relativiste

La conservation de l'énergie est une loi qui découle de l'uniformité du temps. Pour que l'énergie soit invariante sous les transformations de Lorentz, elle doit être de la forme

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{6.6}$$

Cette formule fait resortir qu'en mécanique relativiste l'énergie d'une particule n'est pas nulle même quand sa vitesse est égale à zéro

$$v = 0 \Rightarrow E = m_o c^2 \tag{6.7}$$

f) La transformation des forces

En appliquant les transformations de Lorentz à la formule $\vec{f} = \frac{d}{dt}(m.\vec{u})$ où u est la vitesse d'une particule sur laquelle une force f s'exerce dans le système S, on obtient la force f' dans S' se déplaçant avec v dans la direction de l'axe x

$$f'_x = f_x - \frac{v.u_y}{c^2 - vu_x} f_y - \frac{v\,u_z}{c^2 - v\,u_x} f_z$$

$$f'_y = \frac{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c^2 - v\,u_x} f_y \qquad (6.8)$$

$$f'_z = \frac{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}{c^2 - v\,u_x} f_z$$

7.) ELECTRODYNAMIQUE RELATIVISTE

Si la théorie de relativité est consistente, il faut que non seulement les lois de mécanique mais toutes les lois de physique restent les mêmes sous les transformations de Lorentz. En particulier, des forces d'origine électrique doivent se transformer exactement de la même manière que les forces mécaniques.

Considérons l'exemple suivant: Dans un système inertiel de référence S, deux fils P et Q infiniment longs se déplacent à vitesse constante dans la direction de l'axe x. Les fils parallèles à l'axe x, sont nonconducteurs et portent une charge linéique $+\lambda$ (valeur mesurée dans le système S).

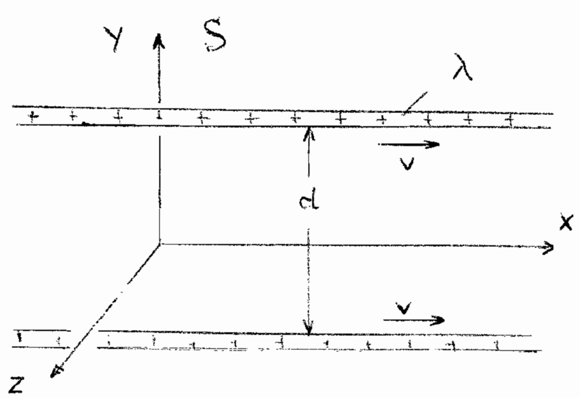


Fig. 4a. Deux fils, P et Q, se déplacent dans S avec une vitesse v le long de l'axe x. Leur charge linéique est $+\lambda$.

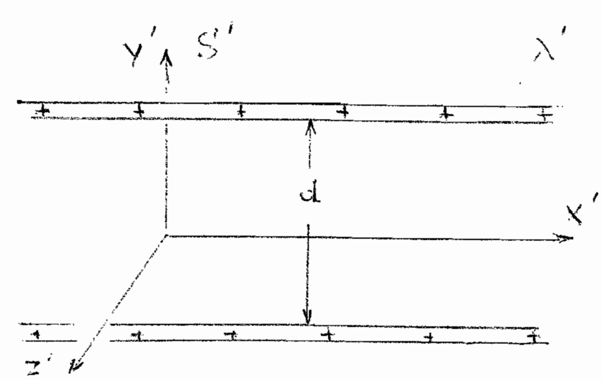


Fig. 4b. P et Q sont stationnaires dans S'. Leur charge linéique est λ' dans ce système, d reste inchangé.

Un observateur dans S veut connaître la force exercée par le fil Q sur le fil P.

Il y a plusieurs méthodes pour le faire.

a) Première méthode: Transformation relativiste de la force

L'observateur dans S dispose de la loi de Gauss pour calculer le champ électrique à l'endroit du fil P, produit par le fil Q

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_o . d} \quad , \quad E_x = 0, \quad E_z = 0 \tag{7.1}$$

Notons bien que E_y fût mesuré dans le système S ! Ceci veut dire que le fil Q exerce une force $F_y = q\,E_y$ sur une charge q au repos dans le système S. Mais nous n'avons pas le droit de dire que la même force s'exerce sur les charges du fil P en mouvement !

La façon correcte de résoudre le problème sera d'abord de calculer la force dans un système référentiel dans lequel les charges sont au repos !

Dans un tel système S' les fils ont une charge $\lambda' = n'. q$ (où n'est le nombre de charges élémentaires q par unité de longueur dans S'). On y mesurera alors un champ

$$E'_y = \frac{\lambda'}{2\pi \epsilon_o d} \; ; \quad E'_x = 0 \, , \quad E'_z = 0 \tag{7.2}$$

à l'endroit du fil P. Et sur une charge élémentaire dans P agira une force

$$f' = \frac{\lambda' q}{2\pi \epsilon_o d} \tag{7.3}$$

Par unité de longueur de fil P subira une force

$$F' = \frac{\lambda'. q. n'}{2\pi \epsilon_o d} = \frac{\lambda'^2}{2\pi \epsilon_o d} \tag{7.4}$$

Les transformations de Lorentz nous permettent maintenant de calculer toutes ces valeurs comme les mesure un observateur dans S.

Considérons d'abord la charge sur les fils comme un alignement de petites sphères chargées. Soit ℓ' la distance entre les sphères dans S'.

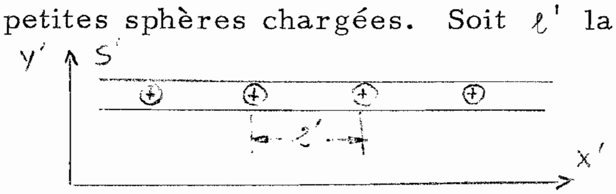


Fig. 5a. Dans S' la distance entre les charges est ℓ'.

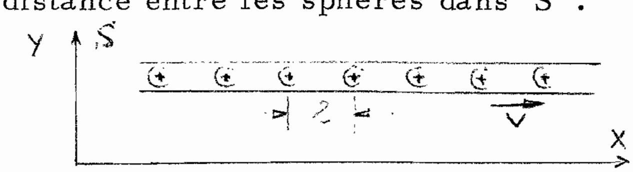


Fig. 5b. Dans S la distance entre les charges paraît contractée à cause du mouvement du fil par rapport à S.

Un observateur dans S mesurera une distance ℓ, plus faible que ℓ' à la suite de la contraction relativiste. Quantitativement:

$$\ell = \ell' \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Par conséquent la densité de charge parait plus grande dans S

$$\lambda = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (7.5)$$

En combinant éqn. (7.5) avec (7.1) et (7.2) nous obtenons la transformation relativiste du champ électrique

$$E_y = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_o d\sqrt{1 - v^2/c^2}} = E'_y / \sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (7.6)$$

La force sur une charge élémentaire se transforme selon les formules (6.8). Notons que dans notre cas, S' est le système "stationnaire". Ainsi nous devons interchanger les valeurs primées et non-primées: $(u_x = u_y = u_z = 0)$

$$f_y = f'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad f_x = 0, \quad f_z = 0 \qquad (7.7)$$

Par unité de longueur dans S nous avons

$$n = n' / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

charges, et la force par unité de longueur devient alors

$$F_y = n. \frac{\lambda'. q\sqrt{1 - v^2/c^2}}{2\pi\epsilon_o d} = \frac{\lambda.\lambda'. \sqrt{1 - v^2/c^2}}{2\pi\epsilon_o d}$$

$$F_y = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_o d}(1 - v^2/c^2), \quad F_x = 0, \quad F_z = 0 \qquad (7.8)$$

b) Deuxième méthode: Introduction d'un champ magnétique

Selon la théorie électromagnétique, des charges en mouvement par rapport à un observateur créent un "champ magnétique" qui modifie la force exercée sur d'autres charges par le champ électrique.

Dans notre cas, les deux fils en mouvement représentent un courant de $Q/t = \frac{Q}{\ell} \cdot \frac{\ell}{t} = \lambda \cdot v$ pour un observateur dans S. Il va conclure que le fil Q produit en plus du champ électrique un champ magnétique

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o d} \qquad\qquad B_z = -\frac{\lambda \cdot v \cdot \mu_o}{2\pi\ d}$$

à l'endroit du fil P. Les forces produites par ces champs sont respectivement:

$$F_{el\,y} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_o d} \quad \text{et} \quad F_{magn.\,y} = -\frac{(\lambda.v)^2\mu_o}{2\pi\ d} \tag{7.9}$$

$$F_{el\,x} = 0\ ;\ F_{el_z} = 0 \qquad F_{magn.\,x} = 0\ ;\ F_{magn.\,z} = 0$$

Transformons légèrement l'expression $F_{magn.\,y}$ en multipliant par ϵ_o/ϵ_o et en posant $\epsilon_o\,\mu_o = 1/c^2$.

$$F_{magn.\,y} = -\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_o d} \cdot \frac{v^2}{c^2} \tag{7.10}$$

On obtient la force totale sur une unité de longueur de P en additionnant $F_{el\,y}$ et $F_{magn.\,y}$:

$$F_y = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_o d}\ (1 - v^2/c^2) \tag{7.11}$$

Cet exemple montre clairement que le champ magnétique, introduit par les physiciens du 19^e siècle dans la théorie de l'électricité pour rendre compte des phénomènes associés au mouvement des charges, n'est rien d'autre qu'une correction relativiste du champ électrique d'un observateur qui se déplace par rapport aux charges.

On en déduit qu'en principe tout phénomène électro-magnétique est la transformée relativiste d'un phénomène électrostatique, en d'autres mots, on peut décrire tout phénomène électromagnétique à l'aide de la loi de Coulomb et les transformations de Lorentz. Néanmoins, la conception du champ magnétique est si utile et facile à utiliser que l'on appliquera avantageusement dans la théorie électromagnétique.

8.) Le champ électrique d'une particule chargée en mouvement

8.1.) Particule en mouvement rectiligne et uniforme.

L'expression (7.6) décrit la transformation relativiste du champ électrique si celui-ci est perpendiculaire au mouvement de la charge qui le produit. L'étude de la formule 6.8 nous montre que la force exercée sur une particule dans le sens de son mouvement ne varie pas sous les transformations de Lorentz si cette particule ne possède aucune vitesse transversale ($u_y = u_z = 0 \Rightarrow f'_x = f_x$). Puisque la charge électrique est invariable, le champ électrique reste également inchangé dans le sens du mouvement de la particule.

$$E_{\perp} = E'_{\perp} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$E_{\parallel} = E'_{\parallel} \qquad (8.1)$$

Bref, un observateur qui voit passer une particule chargée avec une vitesse v, aura l'impression que son champ électrique est plus fort dans le sens transversal d'un facteur $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ que dans le sens de son mouvement. La figure 6 montre cette situation. L'intensité du champ se traduit par la densité des lignes de champ.

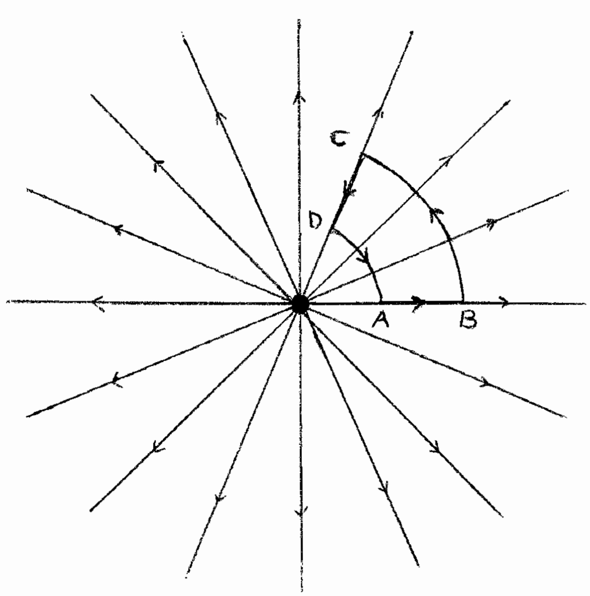


Fig. 6a champ électrique d'une particule chargée au repos par rapport à l'observateur.

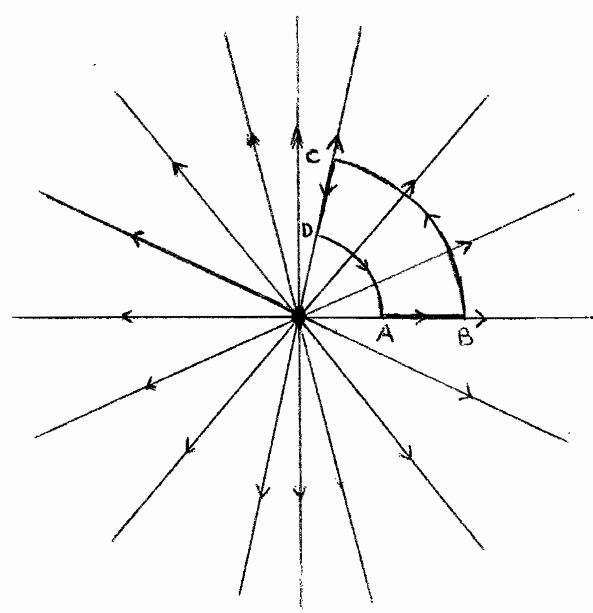


Fig. 6b champ électrique d'une particule chargée en mouvement uniforme par rapport à l'observateur.

Il est facile de montrer que dans le champ d'une charge en mouvement, l'intégrale du champ sur une boucle fermée $\oint \vec{E}d\vec{s}$ n'est pas égale à zéro. Considérons les chemins d'intégration dans les deux cas ci-dessus. Les arcs DA et BC ne contribuent pas à l'intégrale puisque le vecteur $d\vec{s}$ y est perpendiculaire à $\vec{E}$. Les parties AB et DC fournissent des valeurs égales et opposées dans le cas figure 6a, vue la symétric sphérique du champ. Par contre, dans l'exemple 6b, le champ sera plus fort le long de CD que de AB produisant une intégrale $\oint \vec{E}d\vec{s}$ non zéro (qui ne représente rien d'autre que la tension induite dans la boucle ABCD par le champ magnétique de la charge en mouvement.)

8.2) Particule en mouvement accéléré

Dans le chapitre précédent nous avons supposé que la particule chargée était animée depuis un temps infini de la vitesse uniforme v. Admettons cette fois que la particule était au repos dans notre système jusqu'à l'instant t = 0, où elle subit une accélération brusque vers une vitesse constante v. (voir fig. 7). Au moment $t = t_1$ elle se trouve à l'endroit $x = x_1$, entourée d'un champ sembl-able à celui de la figure 6b. Mais la nouvelle que la charge s'est mise en mouvement se propage avec une vitesse finie c autour de l'origine x = 0. C'est pourquoi le champ à une distance supérieure à $c \cdot t_1$ doit être celui d'une charge au repos à x = 0. On peut expliquer d'une façon analogue

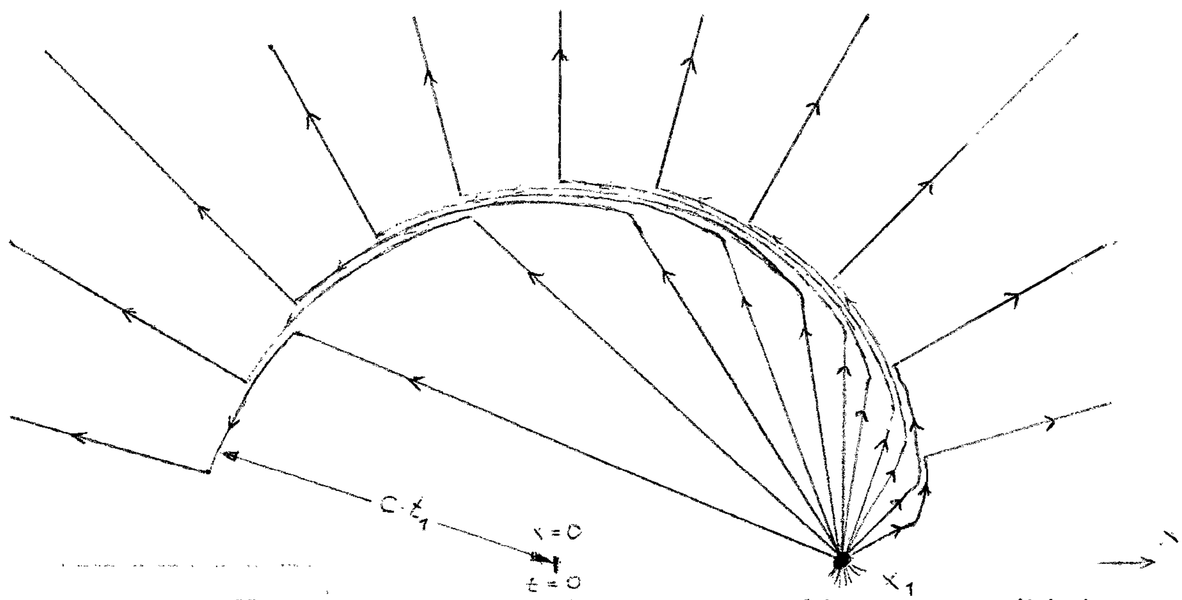


Fig. 7. Une charge au repos à x = o est subitement accélérée, à t = o et se meut ensuite à vitesse uniforme.

le champ d'une charge qui, après une très longue période de mouvement uniforme, est subitement arrêtée à l'origine du système de référence. (Fig. 8)

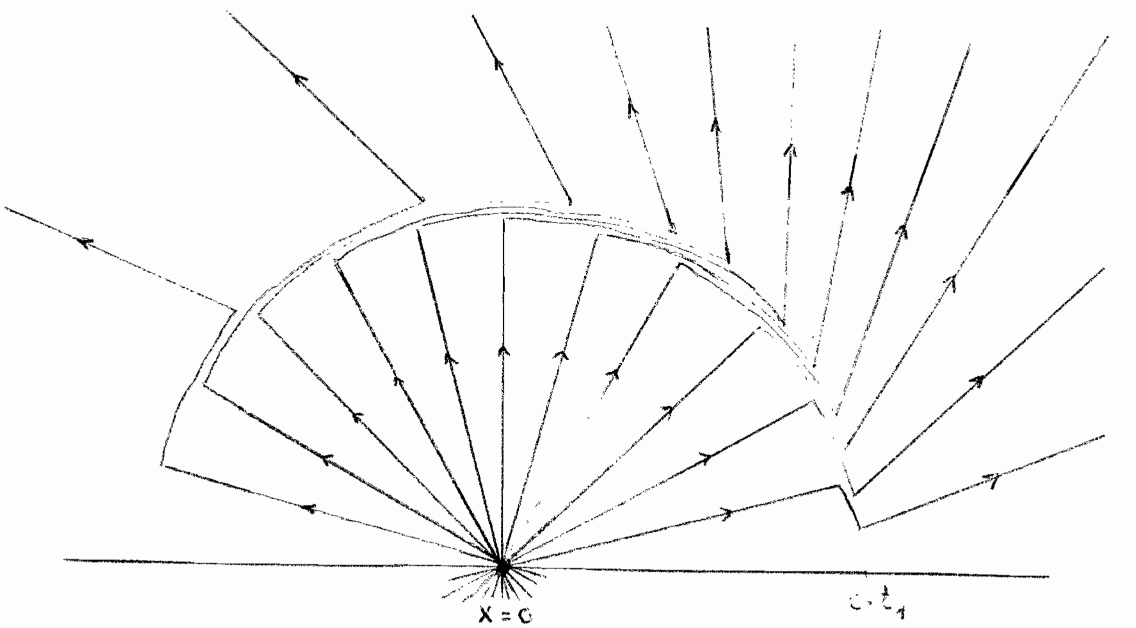


Fig. 8 Une charge qui était en mouvement uniforme, est brusquement arrêtée à x = 0 au moment t = 0 et reste à cet endroit.

La connection entre les lignes de champ représente un front d'onde assez intense* (perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde ; onde transversale). C'est ainsi que, en suivant strictement les conséquences de la théorie de relativité restreinte, nous arrivons à expliquer la radiation émise par une charge accélérée.

* Voir [2], chapitre 5.7.

Exercices

1) Deux fusées dont les trajectoires sont directement opposées, se rencontrent près de la terre. Un observateur sur terre mesure que les deux vaisseaux filent à une vitesse de 0.7 c par rapport à la terre. Quelle est la vitesse relative (d'une fusée par rapport à l'autre) mesurée par les pilotes ?

2) La terre reçoit de l'énergie solaire d'une densité de 1.35×10^3 W/m^2. La terre est à 150,000,000 km du soleil.
- Combien de masse perd le soleil par seconde?
- Quelle est la pression de la radiation solaire sur terre quand on suppose que la terre est un corps noir ?

3) Une charge q se meut à vitesse uniforme $\vec{u}$ dans le système inertiel de référence S. Dans le système S' animé de la vitesse $\vec{u}$ par rapport à S, q est au repos, et la force agissant sur elle et $q.E'$. En utilisant les formules de la transformation des forces, ainsi que les transformations du champ électrique et l'interprétation relativiste de l'induction magnétique, montrez que la force agissant sur la particule dans S est $q.\vec{E} + q.\vec{u} \times \vec{B}$

FIN

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. G. V. Rosser
An Introduction to the Theory of Relativity
Butterworths, London 1964

[2] E. M. Purcell
Electricity and Magnetism
Berkeley Physics Course Vol. 2
McGraw-Hill 1965

[3] C. Kittel
Mechanics
Berkeley Physics Course Vol. 1
McGraw-Hill 1965

[4] W. G. V. Rosser
Classical Electromagnetism via Relativity
Butterworths, London 1968

[5] V. Kourganoff
Initiation à la théorie de relativité
Presses Universitaires de France, Paris 1964

[6] O. Costa de Beauregard et al.
Relativité et Quanta, les grandes théories de la physique moderne
Masson et Cie, Paris 1968

[7] W. Rindler
Special Relativity
Olives and Boyd Ltd 1960

[8] B. Ivanov
Physique Nouvelle
MIR, Moscou 1966

[9] D. F. Lawden
An Introduction to Tensor Calculus and Relativity
Methuen & Co. 1962